
# Matematički dvoboji

Franka Miriam Brückler

**ja sam to prvi dokazao!**

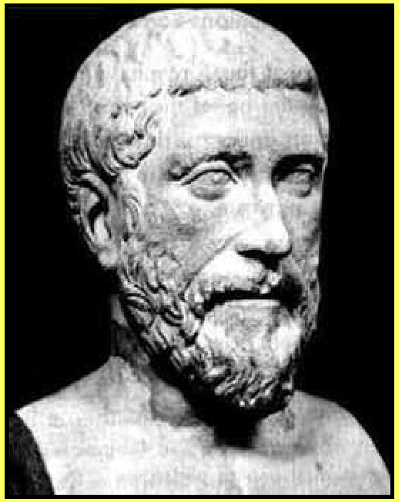
**ti si to krivo dokazao!**

**ukrao si mi teorem!**

**tvoja matematika nema smisla!**

# Hipasus kontra Pitagore

**ili: dodekaedar i $\sqrt{2}$**

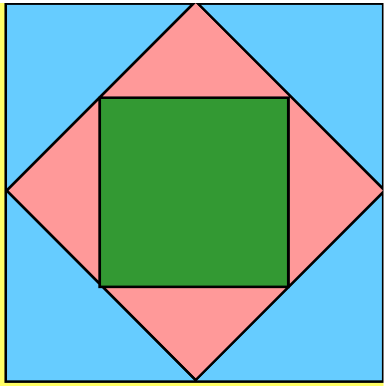


***Pitagora***
(ca. 570-500.pr.Kr.)

- ca. 518.pr.Kr. u Krotonu: pitagorejska škola
- bit svega je (prirodan) broj
- geometrijske veličine su ***sumjerljive*** ako im je omjer duljina/površina/volumena prikaziv kao omjer prirodnih brojeva
- stranica kvadrata nije sumjerljiva dijagonali ☹☠⚡
- pitagorejska škola prestaje postojati oko 460.pr.Kr. uslijed političkih sukoba

- vjerojatno prvi koji je dokazao nesumjerljivost stranice i dijagonale kvadrata: **Hipasus iz Metaponta** (ca. 470. pr.Kr.)

# $\sqrt{2}$ je iracionalan!



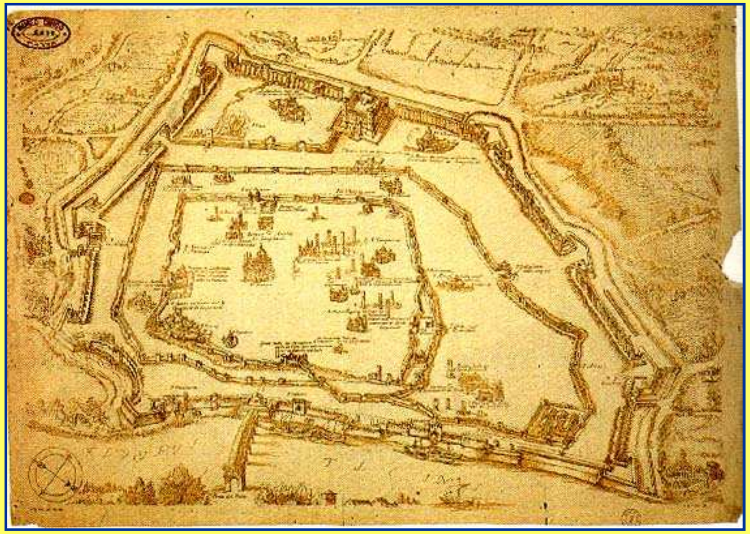
- ako su stranica i dijagonala srednjeg kvadrata sumjerljive, imaju omjer kao dva prirodna broja $m$ i $n$ (tj. stranica je $md$, a dijagonala $nd$ za neku dužinu $d$)
- ako bi $m$ i $n$ bili parni, umjesto $d$ možemo uzeti $2d$
- površina velikog kvadrata je dvostruka površina srednjeg $\Rightarrow m^2d^2=2n^2d^2 \Rightarrow m$ paran (*paran kvadratni broj je četverostruki kvadratni*) $\Rightarrow md=2kd$
- površina srednjeg kvadrata je dvostruka površina malog $\Rightarrow n^2d^2=2k^2d^2 \Rightarrow n$ paran ↯

# Tartaglia kontra Cardana

## ili: kako riješiti kubnu jednadžbu?

***Niccoló Fontana Tartaglia***, 1499. Brescia – 13.12.1557. Venecia

***Girolamo Cardano***, 24.9.1501. Pavia – 21.9.1576. Roma

- matematičari renesanse znali su da je dovoljno znati riješiti kubnu jednadžbu bez kvadratnog člana:

$$y^3 + Ay^2 + By + C = 0$$
$$x = y - A/3$$
$$x^3 + px = q \text{ ili } x^3 = px + q$$

$$y^3 + 3y^2 = 12y + 18$$
$$x = y - 1$$
$$x^3 = 15x + 4$$

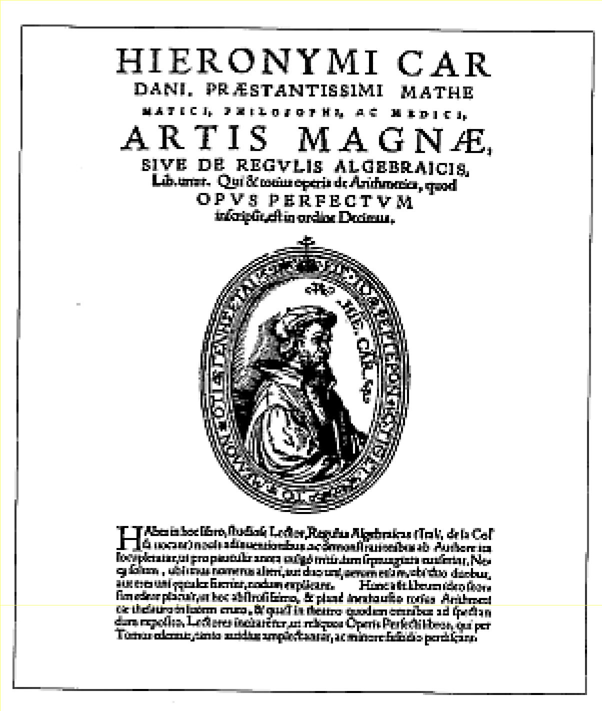
- **Scipione del Ferro** (6.2.1465. – 5.11.1526.) – ca. 1515. rješava reduciranu jednadžbu, postupak drži tajnim
- poslije njegove smrti to rješenje posjeduju (bar) del Ferrov zet Hannibal Nave te student Antonio Fior

- Tartaglia rješava jednadžbu tipa $x^3 + px^2 = q$ i ne taji svoje otkriće
- Fior ga izaziva na natjecanje (1535.): svaki zadaje 30 zadataka, rok 50 dana, pobjednik je tko riješi više

- Tartaglia je očekivao da će svi Fiorovi zadaci biti istog tipa; razvija vlastitu, u biti del Ferrovu, metodu za tip $x^3 + px = q$ i pobjeđuje (u dva sata riješio sve Fiorove probleme)

- Cardano želi saznati Tartaglia-inu metodu i kontaktira ga 1539.
- uspijeva ga nagovoriti, uz zakletvu da metodu neće odati

Quando chel cubo con le coſe appreſſo
Se agguaglia à qualche numero diſcreto
Trouan dui altri differenti in eſſo.
Dapoi terrai queſto per conſueto
Che'l lor produtto ſempre ſia eguale
Al terzo cubo delle coſe neto,
El reſiduo poi ſuo generale
Delli lor lati cubi ben ſottratti
Varra la tua coſa principale.
In el ſecondo de coteſti atti
Quando che'l cubo reſtaſſe lui ſolo
Tu oſſeruarai queſt'altri contratti,
Del numer farai due tal part'à uolo
Che l'una in l'altra ſi produca ſchietto
El terzo cubo delle coſe in ſtolo
Delle qual poi, per commun precetto
Torrai li lati cubi inſieme gionti
Et cotal ſomma ſara il tuo concetto.
El terzo poi de queſti noſtri conti
Se ſolue col ſecondo ſe ben guardi
Che per natura ſon quaſi congionti.
Queſti trouai, & non con paßi tardi
Nel mille cinquecente, quatroe trenta
Con fondamenti ben ſald'è gagliardi
Nella citta dal mar'intorno centa.



HIERONYMI CAR
DANI, PRÆSTANTISSIMI MATHE
MATICI, PHILOSOPHI, AC MEDICI,
ARTIS MAGNÆ,
SIVE DE REGVLIS ALGEBRAICIS,
Lib. unus. Qui & totius operis de Arithmetica, quod
OPVS PERFECTVM
inscripsit, est in ordine Decimus.

- Cardano i student mu Ferrari razvijaju metodu do kraja, a saznaju i da Tartaglia nije prvi koji je otkrio rješenje
- 1545. *Ars magna*

- Tartaglia 1546. objavljuje svoju verziju priče, napada Cardana, za čiju obranu je zadužen Ferrari, koji ga izaziva na natjecanje (u Milanu 1548.)

# Rješenje kubne jednadžbe

Quando chel cubo con le cose appresso

$$x^3 + px$$

Se agguaglia à qualche numero discreto

$$= q$$

Trouan dui altri differenti in esso

$$u - v = q$$

Dapoi terrai, questo per consueto,
Che 'l loro produtto, sempre sia eguale

$$u\,v =$$

Al terzo cubo delle cose netto,

$$(p/3)^3$$

El residuo poi suo generale,
Delli lor lati cubi, ben sottratti

$$\sqrt[3]{u} - \sqrt[3]{v}$$

Varrà la tua cosa principale.

$$= x$$

$$x^3=15x+4$$

$$x=u+v\Rightarrow$$

$$u^3v^3=125$$

$$u^3+v^3=4$$

$$X=u^3=4-v^3\Rightarrow$$

$$X^2-4X+125=0$$

$$(X-2)^2+121=0$$

$$X-2=\pm\sqrt{-121}$$

$$u_{1,2}^3=2\pm\sqrt{-121},v_{1,2}^3=2\mp\sqrt{-121}$$

$$u=2+\sqrt{-1},v=2-\sqrt{-1}$$

$$x=4$$

$$2+\sqrt{-121}=2+11\sqrt{-1}=$$

$$=8-6+12\sqrt{-1}-\sqrt{-1}=$$

$$=2^3+3\cdot2\cdot\left(\sqrt{-1}\right)^2+3\cdot2^2\cdot\sqrt{-1}+\left(\sqrt{-1}\right)^3=$$

$$=2^3+3\cdot2^2\cdot\sqrt{-1}+3\cdot2\cdot\left(\sqrt{-1}\right)^2+\left(\sqrt{-1}\right)^3=$$

$$=\left(2+\sqrt{-1}\right)^3$$

*Quod est, Nullum non problema solvere.*

# Viète kontra van Roomena

## ili: matematika u diplomaciji

- Viète – pravnik i hobi-matematičar, savjetnik kraljeva Henrika III i IV
- 1590. dešifrirao španjolski kod
- 1593 belgijski matematičar Adriaan van Roomen

  (Adrianus Romanus, 1561.-1615.) zadaje zadatak s jednadžbom stupnja 45
- kralj Henrik IV ga daje Vièteu, koji ga rješava uočivši u njegovoj pozadini trigonometrijsku relaciju

***François Viète*,**
1540. Fontenay-le-Comte
– 13.12.1603. Paris

$$x^{45} - 45x^{43} + 945x^{41} - 12300x^{39} - \ldots + 95634x^{5} - 3795x^{3} + 45x = c$$

$$c = 2\sin(45\vartheta), y = 2\sin(15\vartheta), z = 2\sin(5\vartheta), x = 2\sin(\vartheta)$$

$$\sin(3\alpha) = 3\sin(\alpha) - 4\sin^{3}(\alpha)$$

$$c = 3y - y^{3}, y = 3z - z^{3}$$

$$\sin^{5}(\alpha) = \frac{5}{8}\sin(\alpha) - \frac{5}{16}\sin(3\alpha) + \frac{1}{16}\sin(5\alpha)$$

$$x^{5} = 10x - 5(3x - x^{3}) + z$$

$$z \to y \to c$$

# Descartes kontra de Fermata

## ili: kako naći tangentu?

***[Pierre de Fermat]()***, 17.8.1601. Beaumont-de-Lomagne – 12.1.1665. Castres,

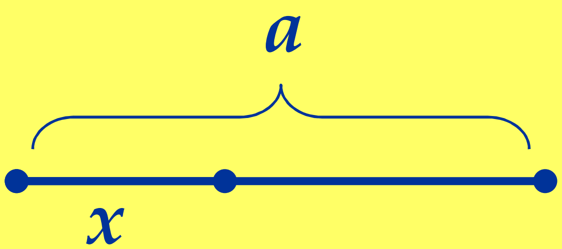
***[René Descartes]()***, 31.3.1596. La Haye (danas Descartes) – 11.2.1650. Stockholm

*Među svim stvarima, razum je najpoštenije raspoređen: svatko misli da je njime tako dobro opskrbljen da ga čak i oni koje je najteže zadovoljiti u svakom drugom pogledu nikad ne žele više nego već imaju.*

- suosnivači analitičke geometrije 1630-ih godina
- sukob oko metode određivanja tangenti na krivulje i ekstrema

- de Fermat: Descartes 1637. nije točno izveo zakon odbijanja svjetla, Descartes je vrlo ljut, osobito kad otkriva da de Fermatovi rezultati o tangentama i ekstremima umanjuju važnost njegove *La Géométrie,* Descartes napada de Fermatovu metodu, kao sudac je imenovan Desargues
- "*... kad sam vidio posljednju metodu koju koristite za nalaženje tangenti na krivulje, ne mogu drugačije odgovo-riti nego tako da kažem da je vrlo dobra i da, da ste ju ovako objasnili na početku, ne bih joj se suprotstavljao.*"
- ipak, Descartes je i dalje pokušavao oštetiti de Fermatovu reputaciju; tako je npr. pohvalno pisao de Fermatu o njegovoj (točnoj) metodi određivanja tangente na cikloidu, a istovremeno Mersenneu da metoda nije točna te da je de Fermat nesposoban kao matematičar i mislioc

**Fermatova metoda određivanja ekstrema** svodi se na zamjenu $x$ s $x+E$, izjednačavanjem polazne i nove ovisnosti, te kraćenjem $E$-dijela. Npr. ako na dužini duljine $a$ tražimo točku takvu da je pro-dukt njenih udaljenosti do oba kraja ($x$ i $a-x$) maksimalan:




$$x(a-x)=(x+E)(a-x-E)$$

$$ax-x^2=ax-x^2+Ea-2Ex-E^2$$

$$Ea=2Ex+E^2$$

$$a=2x+E$$

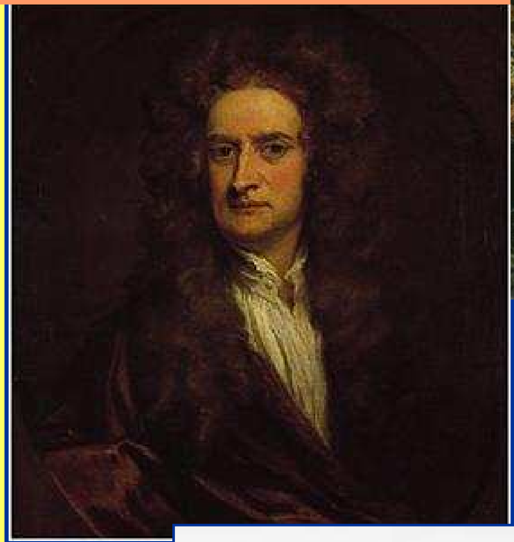
$$a=2x \Rightarrow x=a/2$$

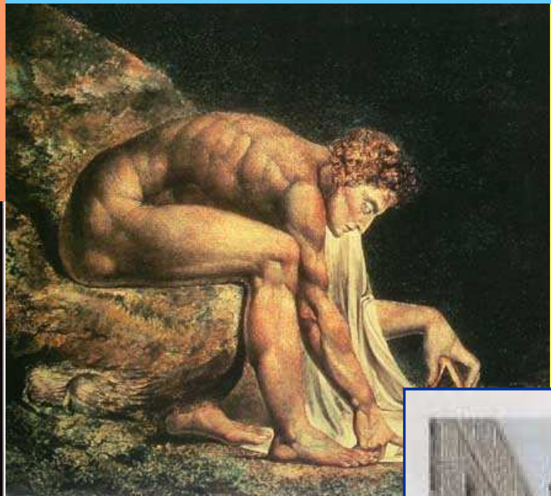
Fermatova metoda određivanja tangente na krivulju također koristi dodavanje i onda poništavanje malih prirasta.

# Newton kontra Leibniza

ili otkriće infinitezimalnog računa

***sir Isaac Newton*,**
4.1.1643. Woolsthorpe – 31.3.1727. London





***Gottfried Wilhelm Leibniz*,**
1.7.1646. Leipzig – 14.11.1716. Hannover

- Newtonovi prvi rezultati o fluksijama: 1665.-1671., no prva objava 1736.
- osnove infinitezimalnog računa Leibniz je razvio u Parizu 1672.; prvi rukopis s $y\mathrm{d}x$ notacijom: 1675.
- nakon Leibnizove objave, Newton mu piše o svojim rezultatima (bez opisa metode); pismo je dugo putovalo te se brz Leibnizov odgovor nije takvim činio Newtonu; Leibniz odlučuje što prije objaviti ostatak svojih rezultata
- Newton 1676. piše drugo pismo koje je putovalo više od pola godine; u tom pismu Newton tvrdi da mu je Leibniz ukrao metodu; u odgovoru Leibniz daje neke detalje svoje metode

- Leibniz 1684. objavljuje *Nova Methodus pro Maximis et Minimis, itemque Tangentibus...* s detaljima njegova diferencijalnog računa, ali bez dokaza
- 1711. Keillov članak u *Transactions of the Royal Society of London* optužuje Leibniza za plagijat; Leibniz traži ispriku, no Keill odbija
- Leibniz se obraća *Royal Society*: komisija za utvrđivanje prioriteta (nije od Leibniza tražila njegovu verziju, a izvještaj u korist Newtona pisao je sam Newton 1713.)
- Leibniz 1714. objavljuje anonimni pamflet – kao argument koristi jednu Newtonovu grešku koju je uočio Johann Bernoulli; Keill objavljuje odgovor, a Leibniz odbija dalju raspravu jer da ne može odgovarati idiotu

# Osnovni teorem infinitezimalnog računa

deriviranje i integriranje (nalaženje tangente i površine; određivanje brzine iz puta i obrnuto) su međusobno inverzni postupci

fluens: $x=x(t)$

fluksija: $\dot{x}$

$f(x,y)=0$

$$x \to x + \dot{x}o, y \to y + \dot{y}o$$

$o$ je beskonačno mali

koeficijent smjera tangente je $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$

$$\sum y_i$$

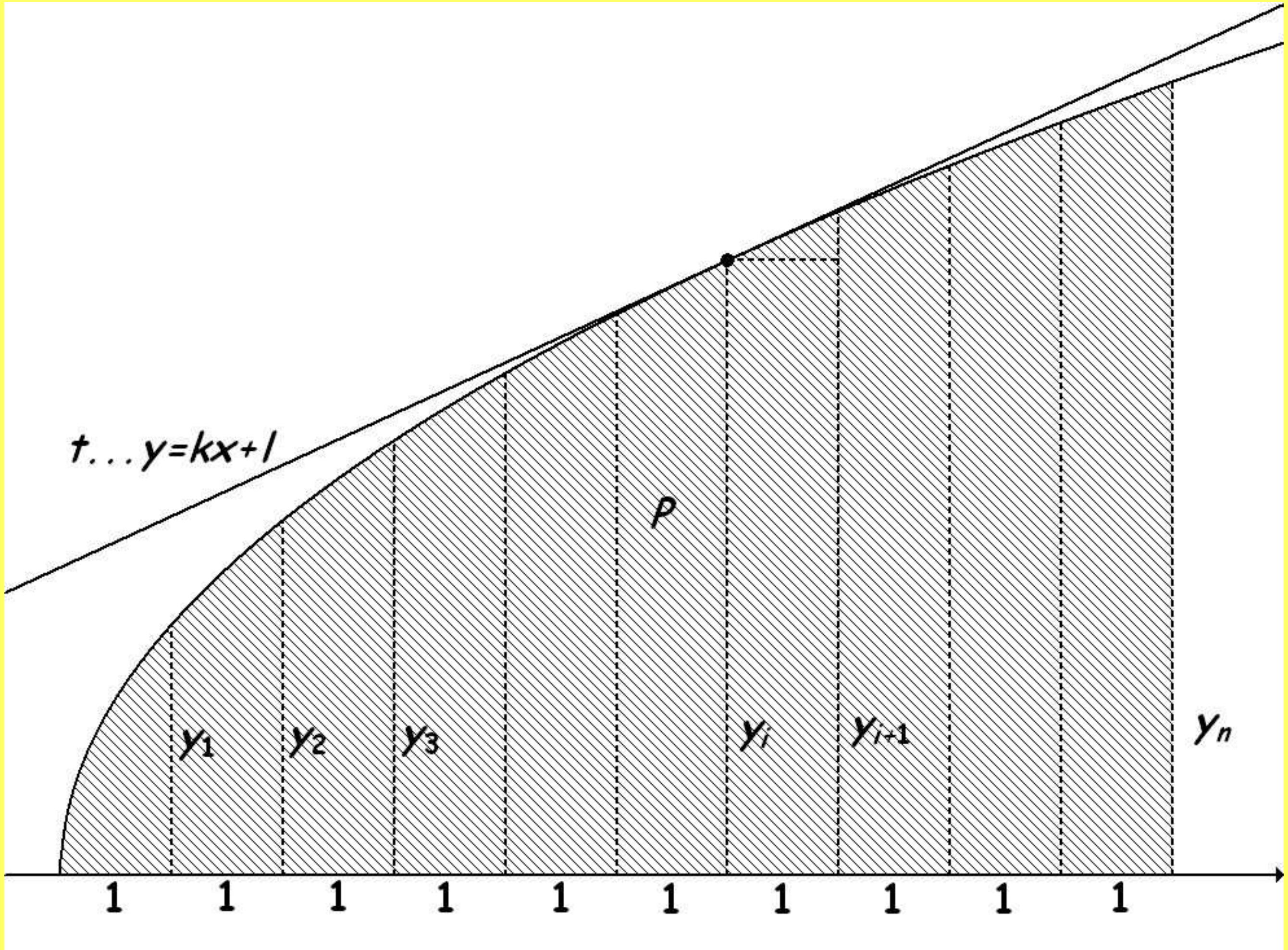
$$d_i = y_{i+1} - y_i \Rightarrow$$

$$\sum_1^n d_i = y_{n+1} - y_1$$

$$dy = d_i \approx 0 \Rightarrow$$

$$\sum d_i = \int dy = y \Rightarrow$$

$$d \int dy = y \, dx$$



t... y=kx+l
P
y1
y2
y3
yi
yi+1
yn
1
1
1
1
1
1
1
1
1
1

# Johann kontra Jacoba Bernoullija (i de l'Hôpitala)

Jacob Bernoulli, 27.12.1654. Basel – 16.8.1705. Basel

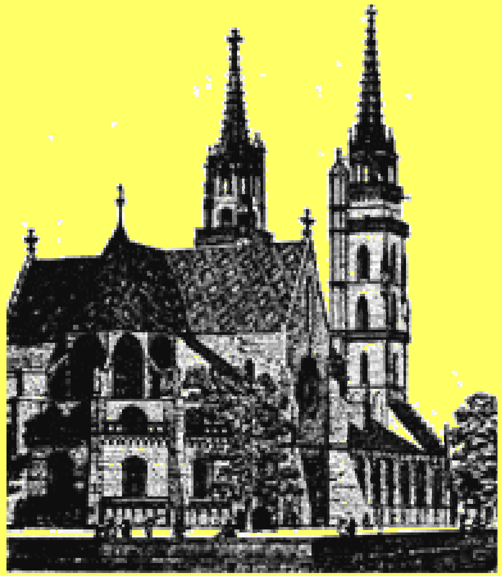
- Jacob je studirao teologiju i filozofiju, a potom se počeo baviti matematikom
- Johann je studirao medicinu, a onda ga je matematici podučio Jacob
- oba su dali vrlo značajne matematičke rezultate

Johann Bernoulli, 27.7.1667. Basel – 1.1.1748. Basel

- 1692. Johann u Parizu susreće Guillaume François Antoine Marquis **de L'Hôpitala** (1661.-1704.) i podučava ga Newton-Leibnizovom infinitezimalnom računu

- 1696. de l’Hôpital objavljuje prvi udžbenik infinitezimalnog računa na osnovi tih predavanja, ali bez spominjanja Johanna Bernoullija (osim zahvale u predgovoru za mnoge dobre ideje);
- u toj knjizi se nalazi de l’Hôpitalovo pravilo, no ono je rezultat Johanna Bernoullija; ipak, de l’Hôpital je u svom djelu ispravio neke od Johannovih grešaka

- 1691. Johann je riješio problem o lančanici kojeg je postavio Jacob
- niz rezultata u to doba dobivaju u suradnji, no ubrzo postaju suparnici



- iza 1697. prekidaju komunikaciju
- Johann se pravi važan svojim rezultatima, Jacob odgovara da ga je on podučio svemu i napada ga u tisku
- nakon Jacobove smrti Johann ga nasljeđuje na sveučilištu

# Gauss kontra Legendrea

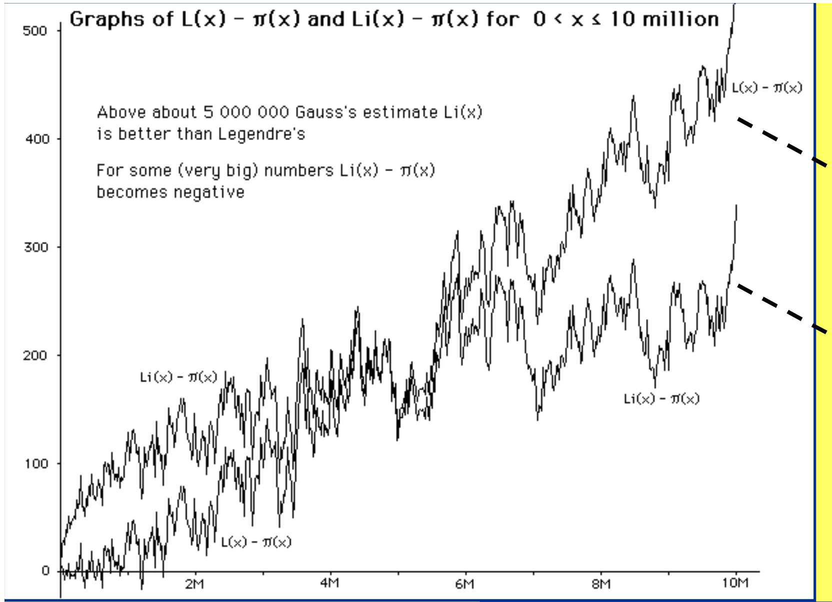

Johann Carl Friedrich Gauss,
30.4.1777.
Braunschweig –
23.2.1855 in Göttingen

*Ako filozof kaže nešto istinito, onda je to trivijalno. Ako kaže nešto netrivijalno, onda je to neistinito.*

*Matematika je kraljica znanosti, a teorija brojeva je kraljica matematike.*

Adrien Marie Legendre,
18.9.1752.
Paris –
10.1.1833.
Paris

- Legendre 1785.: netočan dokaz zakona kvadratnog reciprociteta, bolji: 1798.; metoda najmanjih kvadrata 1806.
- Gauss 1801. daje točan dokaz zakona kvadratnog reciprociteta i kritiku Legendreovih dokaza, te ističe svoj prioritet
- Gauss MNK objavljuje 1809. i tu također tvrdi da ju je on otkrio prije Legendrea
- Legendre jako povrijeđen kritikom mladog Gaussa ("*Ovakva drskost je neshvatljiva za čovjeka koji ima dovoljno osobnih zasluga da nema potrebe da prisvaja tuđa otkrića.*")
- Legendre 1808. daje novi dokaz zakona kvadratnog reciprociteta, uz korektno citiranje Gaussa; u istom djelu donosi procjenu broja prostih brojeva manjih od $n$ (i za to će Gauss tvrditi da je prvi)




$$\pi(n) \approx \frac{n}{\ln(n) - 1{,}08366}$$

$$\pi(n) \approx \int_2^n \frac{dt}{\ln(t)}$$

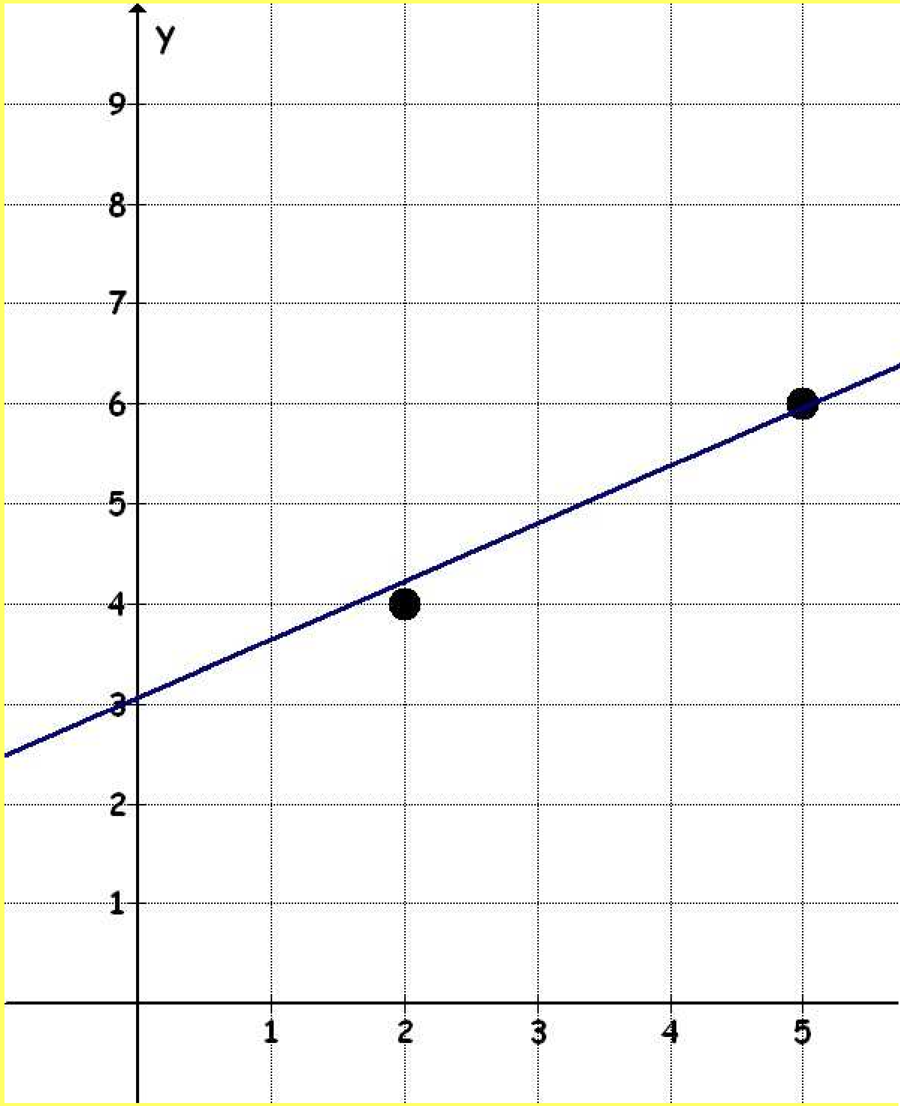
| ***n*** | **π(*n*)** | **Gauss** | **Legendre** |
|---:|---:|---:|---:|
| 1000 | 168 | 178 | 172 |
| 10000 | 1229 | 1246 | 1231 |
| 100000 | 9592 | 9630 | 9588 |
| 1000000 | 78498 | 78628 | 78534 |
| 10000000 | 664579 | 664918 | 665138 |
| 100000000 | 5761455 | 5762209 | 5769341 |
| 1000000000 | 50847534 | 50849235 | 50917519 |
| 10000000000 | 455052511 | 455055614 | 455743004 |

# Zakon kvadratnog reciprociteta

$$x^2 \equiv p \pmod q$$
$$x^2 \equiv q \pmod p$$

ove dvije kongruencije su obje rješive osim ako i $p$ i $q$ pri dijeljenju s 4 daju ostatak 3 (tada je točno jedna od njih rješiva)

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{(p-1)(q-1)}{4}}, \quad \left(\frac{p}{q}\right) = \begin{cases} 1, & p \equiv n^2 \pmod q \\ -1, & inačn \end{cases}$$




| $i$ | $x_i$ | $y_i$ | $x_i y_i$ | $x_i^2$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | | | | |
| 2 | | | | |
| $\vdots$ | | | | |
| $n$ | | | | |
| $\sum$ | $B$ | $D$ | $C$ | $A$ |

$$a = \frac{BD - nC}{B^2 - nA}, \quad b = \frac{D - aB}{n}.$$

# Cauchy kontra puno njih (ili obrnuto ☺ )

*Ljudi odlaze, ali njihova djela ostaju.*

*Augustin Louis Cauchy*,
21.8.1789. Paris – 23.5.1857. Sceaux

- Lagrange i Laplace su bili gosti obitelji
- ukupno 789 radova
- od 1815 profesor na *École Polytechnique*
- slavu stječe dokazom jedne Fermatove hipoteze o poligonalnim brojevima (1816.)

- zahvaljujući političkom razvoju 1816. dobiva mjesto u Akademiji znanosti, zatim i u *Collège de France*
- prvi precizirao uvjete konvergencije redova, precizno definirao integral, postavio analizu na ε-δ jezik, prvi definirao kompleksnu funkciju kompleksne varijable...
- loš odnos s drugim znanstvenicima
- sklonost "krađi" tuđih rezultata i gubljenju radova (Abel, Galois, Argan, Grassmann ...)

- nakon srpanjske revolucije 1830. odlazi u Švicarsku, a novi režim od Cauchyja zahtijeva zakletvu o podršci, što Cauchy odbija i gubi sve pozicije u Parizu
- 1838. povratak u Pariz i vraćanje na poziciju u Akademiji, no zbog političkih i vjerskih uvjerenja ne dobiva nastavu
- Louis Philippe svrgnut 1848. – Cauchyju vraćaju sveučilišne pozicije
- i dalje stvara probleme kolegama (npr. 1850. u *Collège de France* je izabran Liouville, a Cauchy pokušava izmijeniti odluku te dolazi do sukoba)
- potkraj života sukob s Duhamelom oko prvenstva u jednom rezultatu o neelastičnim sudarima; Cauchy odbija priznati da je u krivu

# Cauchy vs. Abel

***Niels Henrik Abel***, 5.8.1802. Frindoe, Norveška – 6.4.1829. Froland

- Abel 1826.:
- *"Cauchy je lud i tu se ne može ništa napraviti, iako je trenutno on jedini koji zna kako se treba raditi matematika."*,
- *"Francuzi su mnogo rezerviraniji prema strancima nego Nijemci... Upravo sam završio široku raspravu o određenoj klasi transcendentnih funkcija da ju predstavim institutu, što ću napraviti idući ponedjeljak. Pokazao sam ju gospodinu Cauchyju, no on se jedva udostojao baciti pogled na nju."*

- za taj Abelov rad kao recenzenti imenovani su Cauchy i Legendre, ali do Abelove smrti Cauchy još nije dao izvještaj; nakon potrage za zametnutim radom, površan izvještaj predaje kratko nakon Abelove smrti; članak je tiskan 1841., nakon toga ponovno nestao do 1952.

# Cauchy vs. Galois

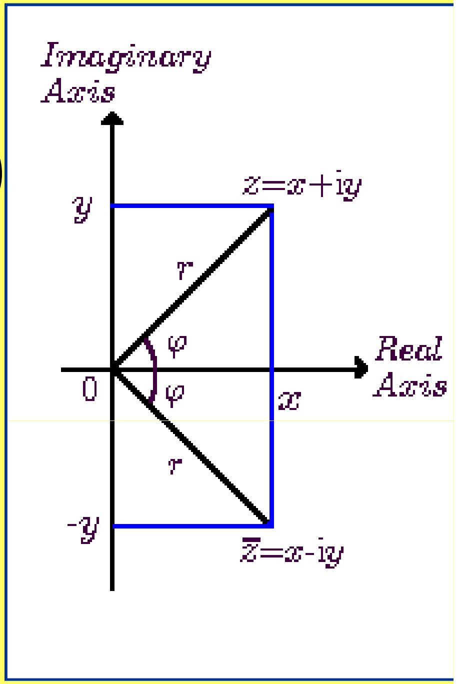
***Evariste Galois***, 25.10.1811. Bourg la Reigne, Francuska – 31.5.1832. Paris

- 1.6.1829. predaje članak o rješenju algebarskih jednadžbi Akademiji – Cauchy recenzent
- kasnije šalje i druge članke Cauchyju i Fourieru, no svi ti članci su zagubljeni
- na Cauchyjev nagovor čak je povukao jedan članak i umjesto njega predao drugi za *Grand Prix* Akademije

- u noći pred smrt zapisuje glavne rezultate o teoriji grupa (nema definicicije) koje će objaviti tek Liouville 1846
- 1845 Cauchy daje definiciju grupe (zatovrenost, ostala svojstva se podrazumijevaju jer se radi o grupama permutacija)

# Cauchy vs. Argand

**[*Jean Robert Argand*]**,
18.7.1768. Geneva –
13.8.1822. Paris




- Argandov dijagram: geometrijski prikaz kompleksnih brojeva (1814.) – *i* se interpretira kao rotacija ravnine za pravi kut
- dao je dokaz osnovnog teorema algebre (1806.) – do 19. stoljeća matematičari vjeruju u postojanje *n* korijena polinoma stupnja *n* kao očito, a pokušaji dokaza se svode na dokaze da su ti korijeni kompleksni
- 1814 objavio jednostavniji dokaz (na osnovi d'Alembertove ideje iz 1746)

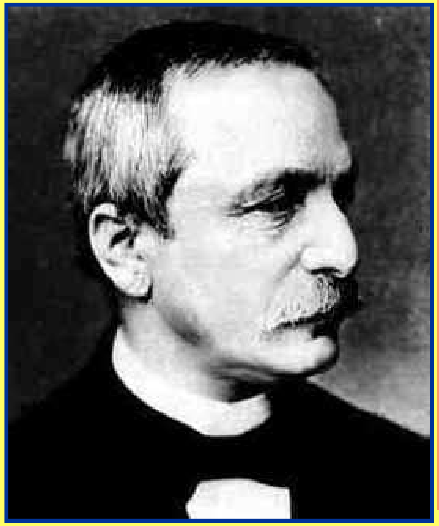
- 1820. Cauchy u svojoj *Cours d'analyse* posvećuje čitavo poglavlje Argandovom dokazu, bez da ga spomene
- Gauss daje jedan nepotpun dokaz 1799, zatim dva potpuna dokaza 1816

# Cauchy vs. Grassmann

***Hermann Grassmann***, 15.4.1809. Stettin, Pruska – 26.7.1877. Stettin

- 1844. Grassmann daje apstraktnu definiciju algebre uz korištenje linearne (ne)zavisnosti i dimenzije (jasniji prikaz: 1862.)
- Adhémar Jean Claude Barré de Saint-Venant (1797.-1886.) je 1845. dobio slične rezultate te Grassmann, shvativši da Saint-Venant ne zna za njegove, šalje kopije svojih rezultata Cauchyju da jednu proslijedi Saint-Venantu

- Cauchy 1853. objavljuje analognu metodu, bez reference bilo na Grassmanna ili Saint-Venanta
- Grassmann ulaže žalbu Akademiji te je 1854. uspostavljena komisija za utvrđivanje prioriteta (koja nikad nije podnijela izvješće)



[Leopold Kronecker](), 7.12.1823. Liegnitz, Pruska – 29.12.1891. Berlin

*postoje samo oni matematički objekti za koje postoji konačan postupak njihove konstrukcije*

# Kronecker kontra Cantora

*neprebrojivost od **R** povlači postojanje beskonačno mnogo transcendentnih brojeva, no nema postupka konstrukcije*

[Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor](), 3.3.1845. St. Petersburg – 6.1.1918. Halle

- Cantor je pohađao Kroneckerova predavanja za vrijeme studija u Berlinu 1860-ih
- *Crelle’s Journal* – Cantor pokušava objaviti svoje rezultate, npr. ekvipotentnost segmenta s kvadratom 1877./8.
- Kronecker (član uredništva, kasnije glavni urednik) se suprotstvalja objavljivanju, članak je objavljen tek nakon Dedekindove intervencije u Cantorovu korist
- depresija
- 1891. Cantor poziva Kroneckera na prvi sastanak *Deutsche Mathematikervereinigung* u Halleu, no Kronecker nije mogao doći zbog smrti žene (a i sam uskoro umire)

# Neprebrojivost *R* i ekvipotentnost segmenta i kvadrata

$R=\{r_1, r_2, r_3, \ldots\}$

$r_1 = 0,5105110\ldots$

$r_2 = 0,4132043\ldots$

$r_3 = 0,8245026\ldots$

$r_4 = 0,2330126\ldots$

$r_5 = 0,4107246\ldots$

$r_6 = 0,9937838\ldots$

$r_7 = 0,0105135\ldots$

$\ldots$

$r = 0,4555554\ldots \notin R$

$\langle 0,1] \sim \langle 0,1] \times \langle 0,1]$

$x = 0, |5\ |1|\ 0\,5|\ 1|\ 01|\ldots$

$x = 0, |k_1|k_2|k_3|\ \ldots$

$(y,z)$

$y = 0, |k_2|k_4|k_6|\ \ldots$

$z = 0, |k_1|k_3|k_5|\ \ldots$