

NOVA METODA POBOLJŠAVANJA KLASIČNIH NEJEDNAKOSTI

Jurica Perić

Klasične nejednakosti su od svog nastanka predmet stalnog izučavanja. Među najznačajnijima su svakako Jensenova, Hölderova, Minkowskijeva, nejednakosti među sredinama, Hermite-Hadamardova, Giaccardi-Petrovićeva, te čitav niz nejednakosti povezanih s navedenim nejednakostima (konverzije, suprotne nejednakosti, profinjenja, interpolacije i druge srodne nejednakosti). Osnovni rezultat iz kojega su se kasnije nejednakosti razvijale je poznata nejednakost danskog matematičara J. L. W. Jensena iz 1905. godine:

Neka je I interval u \mathbb{R} , funkcija $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ konveksna na I , te neka je za $n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{p} = (p_1, \dots, p_n)$ pozitivna realna n -torka, te neka je $P_n = \sum_{i=1}^n p_i > 0$.

Tada za svako $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in I^n$ vrijedi nejednakost

$$f\left(\frac{1}{P_n} \sum_{i=1}^n p_i x_i\right) \leq \frac{1}{P_n} \sum_{i=1}^n p_i f(x_i).$$

U predavanju dajemo poboljšanja i generalizacije nekih klasičnih nejednakosti (konverzne Jensenove, varijanti Jensenove i Hermite-Hadamardove). Metoda kojom ćemo poboljšavati nejednakosti se temelji na sljedećem rezultatu:

Ako je f konveksna funkcija na intervalu $I \subset \mathbb{R}$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in I^n$ ($n \geq 2$), \mathbf{p} i \mathbf{q} pozitivne n -torke takve da $p \geq q$ (to jest, $p_i \geq q_i, i = 1, \dots, n$), $P_n = \sum_{i=1}^n p_i, Q_n = \sum_{i=1}^n q_i$, tada vrijedi

$$\sum_{i=1}^n p_i f(x_i) - P_n f\left(\frac{1}{P_n} \sum_{i=1}^n p_i x_i\right) \geq \sum_{i=1}^n q_i f(x_i) - Q_n f\left(\frac{1}{Q_n} \sum_{i=1}^n q_i x_i\right) \geq 0.$$

Većinu rezultata ćemo dati generalizirane na pozitivne linearne funkcionalne, te, gdje je to moguće, na k -simplekse u \mathbb{R}^k .