1 Primjeri pismenih ispita

1.1 Uvod

U uvodnom odjeljku je opis teksta kojeg kreiramo. Ovaj tekst je napisan u dokumentu tipa article. Dokument ima veličinu papira a4 i veličinu slova 12 pt. Na početku se nalazi naslov prvog poglavlja.

Na iduće dvije stranice se nalaze dva primjera pismenih ispita. Namjenjeni su učenju osnova LaTeX-a i nisu primjereni za provjeru znanja.

Prvi pismeni ispit

1. Izračunajte
$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}.$$

2. Koliko je
$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)?$$

3. Neka je
$$f\colon \left(0, \frac{\pi^{e^2}}{\sqrt[3]{\frac{1}{2}}}\right] \to \mathbb{R}, \qquad f(x) = 1+\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^3.$$

   Izračunajte $\int\limits_0^1 f(x)\,dx$.

4. Zadana je funkcija $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ s pravilom
$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & \text{za } x \in \langle -\infty, 1\rangle\,, \\ 0 & \text{inače.} \end{cases}$$

   Izračunajte $f'(1)$.

5. Ima li sustav
$$\begin{array}{rcl} x^2 & = & y+z \\ y^4 & = & 2x+z^3 \\ z & = & \sqrt{\sqrt{x^2+2y}+3x} \end{array}$$

   rješenja?

Nije dozovoljeno korištenje formula, kalkulatora ni ostalih pomagala.

Drugi pismeni ispit

1. Riješite sustav
$$x^3 + y^3 = 9a^3,$$
$$x^2y + xy^2 = 6a^3,$$
gdje je a bilo koji realan broj.

2. Pokažite da je
$$\log_a b = \frac{1}{\log_a b}$$
za sve $a, b \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$.

3. Dokažite sljedeće nejednakosti:

   a) $3\left(\sin^4\alpha + \cos^4\alpha\right) - 2\left(\sin^6\alpha + \cos^6\alpha\right) = 1$;

   b) $\dfrac{1 - 2\cos^2\varphi}{\sin\varphi\cos\varphi} = \operatorname{tg}\varphi - \operatorname{ctg}\varphi$.

4. Zadani su trokuti ABC i $A_1B_1C_1$, tako da je $\sphericalangle ABC = \sphericalangle A_1B_1C_1 = \beta$ i $\sphericalangle CAB = \alpha = 180° - \sphericalangle C_1A_1B_1$. Dokažite da za stranice trokuta vrijedi:
$$|BC| \cdot |B_1C_1| = |CA| \cdot |C_1A_1| + |AB| \cdot |A_1B_1|.$$

5. Na osnovici $\overline{AB}$ jednakokračna trokuta ABC uzeta je bilo koja točka D. Dokažite da kružnice opisane trokutima ADC i BDC imaju polumjere jednakih duljina.

6. Izračunajte
$$1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \cdots = \sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^i = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{2}{3}\right)^i.$$

U sljedeću tablicu upišite procjenu težine zadataka: lagan (L), srednje težak (S), težak (T).

1	2	3	4	5	6

Prikažimo rješenja nejednadžbe $|z+2|+|z-2|<2$ u Gaussovoj ravnini