

Aleksandra Čižmešija; Renata Svedrec,  
Nikol Radović; Tanja Soucie, Zagreb

## Geometrijsko mišljenje i prostorni zor u nastavi matematike u nižim razredima osnovne škole

### Matematička kompetencija

U prosincu 2006. godine Parlament i Vijeće Europske unije zajednički su donijeli *Preporuke o ključnim kompetencijama za cjeloživotno učenje*<sup>1</sup>. Te su preporuke poznate i pod nazivom *Europski referentni okvir*<sup>2</sup>. U njima je navedeno osam ključnih kompetencija: komunikacija na materinskom jeziku, komunikacija na stranim jezicima, matematička kompetencija i osnovne kompetencije u prirodoslovlju i tehnologiji, digitalna kompetencija, kompetencija *učiti kako učiti*, socijalna i građanska kompetencija, poduzetnost i poduzetništvo, te kulturna svijest i izražavanje. Svaka od njih precizno je definirana i ukratko objašnjena.

Za nas matematičare najzanimljivija, **matematička kompetencija** definirana je kao *„sposobnost razvoja i primjene matematičkog mišljenja kako bi se riješio niz problema u svakodnevnim situacijama. Uz dobru numeričku pismenost (vladanje brojevima i računskim operacijama), naglasak je na procesu i aktivnosti, kao i na znanju. Matematička kompetencija uključuje, na različitim stupnjevima, sposobnost i volju za korištenjem matematičkih načina mišljenja (logičko i prostorno mišljenje) i prikazivanja (formule, modeli, konstrukcije, grafovi, grafikoni).”*

<sup>1</sup>Dokument je objavljen 30. prosinca 2006. u Službenom glasniku Europske unije (L394). Dostupan je na URL adresi [http://eur-lex.europa.eu/LexUriServ/site/en/oj/2006/l\\_394/l\\_39420061230en00100018.pdf](http://eur-lex.europa.eu/LexUriServ/site/en/oj/2006/l_394/l_39420061230en00100018.pdf).

<sup>2</sup>Cijeli tekst dokumenta *Key Competences for Lifelong Learning – European reference framework* dostupan je na engleskom jeziku na URL adresi [http://ec.europa.eu/dgs/education\\_culture/publ/pdf/ll-learning/keycomp\\_en.pdf](http://ec.europa.eu/dgs/education_culture/publ/pdf/ll-learning/keycomp_en.pdf) a predstavlja prilog *Preporukama o ključnim kompetencijama za cjeloživotno učenje*.

## Opći ciljevi matematičkog obrazovanja

S navedenom su kompetencijom usklađeni i opći ciljevi matematičkog obrazovanja u prijedlogu *Okvirnog matematičkog kurikulumu* ([www.matematika.hr/kurikulum](http://www.matematika.hr/kurikulum)). Prema njima, učenici će:

- usvojiti temeljna matematička znanja, vještine i procese, te uspostaviti i razumjeti matematičke odnose i veze
- biti osposobljeni za rješavanje matematičkih problema i primjenu matematike u različitim kontekstima, uključujući i svijet rada
- razviti pozitivan odnos prema matematici, odgovornost za svoj uspjeh i napredak te svijest o svojim matematičkim postignućima
- prepoznati i razumjeti povijesnu i društvenu ulogu matematike u znanosti, kulturi, umjetnosti i tehnologiji, kao i njezin potencijal za budućnost društva
- biti osposobljeni za apstraktno i prostorno mišljenje te logičko zaključivanje
- učinkovito komunicirati matematička znanja, ideje i rezultate rabeći raznovrsne prikaze
- učinkovito primjenjivati tehnologiju
- steći čvrste temelje za cjeloživotno učenje i nastavak obrazovanja.

U *Okvirnom matematičkom kurikulumu* navedena su i očekivana učenička postignuća (obrazovni ishodi) na kraju pojedinog odgojno-obrazovnog ciklusa<sup>3</sup>. Sustavno su organizirana u dvije dimenzije – matematičke procese i matematičke koncepte. Pritom, matematički procesi opisuju tzv. opće matematičke kompetencije, tj. učeničke više kognitivne sposobnosti i vještine čiji razvoj nastava matematike mora omogućiti. To su:

- prikazivanje i komunikacija
- povezivanje
- logičko mišljenje, argumentiranje i zaključivanje
- rješavanje problema i matematičko modeliranje
- primjena tehnologije.

<sup>3</sup>Prvi odgojno-obrazovni ciklus obuhvaća prva četiri razreda osnovne škole, drugi ciklus čine peti i šesti razred, a treći ciklus sedmi i osmi razred osnovne škole. Četvrti ciklus odnosi se na opće obrazovanje u srednjim strukovnim školama (u pravilu prva dva razreda srednje škole) te na gimnazijsko obrazovanje (sva četiri razreda).

Ove su matematičke kompetencije zapravo procesi putem kojih učenici usvajaju i primjenjuju matematičko znanje i vještine. Važno je naglasiti da su svi procesi međusobno povezani. Primjerice, pri rješavanju problemskih zadataka učenici bi morali objasniti svoje načine rješavanja i smislenost metoda koje su pritom primijenili. Učitelj ih tada treba navoditi na stvaranje pretpostavki te objašnjavanje smislenosti njihovih rezultata u usmenom ili pisanom obliku. Komunikacija i osvrt na riješene probleme potiču učenike na dodatno artikuliranje svojih razmišljanja, sagledavanje problema iz različitih perspektiva i usporedbu različitih metoda rješavanja. Time se potiče tzv. proces metakognicije koji učenike dalje potiče na prilagodbu svojih metoda te stvaranje poveznica između matematičkih koncepta kako bi što učinkovitije došli do preciznih i točnih rješenja.

Naravno, stjecanje npr. vještina komuniciranja i suradničkog rada bit će moguće jedino ukoliko učenici u nastavnom procesu dobiju dovoljno prilika za njihovo prakticiranje nizom raznih aktivnosti. Ovime je poslana jasna poruka da u nastavi matematike treba preferirati tzv. metode aktivne nastave u kojima dominiraju učeničke timske i samostalne aktivnosti, a ne one, mahom tradicionalne, nastavne metode u kojima je dominantna uloga nastavnika. Bitno je istaći da se matematički procesi ne poučavaju kao zasebne nastavne cjeline već se trebaju uklopiti u sve nastavne sadržaje i sve godine učenja matematike. Učenici moraju rješavati problemske zadatke, stvarati poveznice između matematičkih ideja i konceptata, komunicirati, logički misliti, argumentirati svoje tvrdnje, donositi zaključke i primjenjivati tehnologiju kako bi izgradili svoja matematička znanja, razumijevanje konceptata i vještine koje se od njih zahtijevaju na pojedinoj razini.

Nastava matematike stoga se ne smije ograničiti na isključivo nizanje jednostavnih i tehnički zahtjevnijih rutinskih zadataka. Cilj je učenike razviti u kreativne i fleksibilne mislioce s pozitivnim stavom prema matematici, otvorene prema postavljanju i rješavanju matematičkih problema i uporabi matematike u raznovrsnim situacijama iz svakodnevnog života, drugih nastavnih predmeta i buduće struke.

Drugu dimenziju učeničkih postignuća određuju matematički koncepti. Organizirani su u pet domena:

- Brojevi
- Algebra i funkcije

- Oblik i prostor
- Mjerenje
- Podatci,

a definiraju nastavne sadržaje koje učenici trebaju savladati tijekom učenja matematike. U njihovoj razradi u Okvirnom matematičkom kurikulumu primijetiti ćete i nekoliko novosti – domena Podatci zastupljena je tijekom cijelog matematičkog obrazovanja, dok je u nas tradicionalna domena Geometrija sada sustavno podijeljena u Oblik i prostor te Mjerenje.

Za sve su odgojno-obrazovne cikluse navedene iste domene, čime se želi naglasiti unutrašnja povezanost matematike i kontinuitet u njezinom učenju. Naravno, konkretni nastavni sadržaji i učenička postignuća razlikuju se od ciklusa do ciklusa, a aktivni glagoli upotrijebljeni u iskazima učeničkih postignuća sugeriraju razinu (dubinu i širinu) do koje u poučavanju i učenju treba ići. Pritom su u svakom sljedećem ciklusu na višoj razini ponovljena postignuća iz prethodnog ciklusa nužna za savladavanje novog gradiva. Njihovim isticanjem osigurava se i praćenje učeničkog napredovanja u učenju matematike. U učeničkim postignućima za sve koncepte naglasak je stavljen na temeljna znanja i vještine, ali i na primjene u svakodnevnim situacijama (primjerene razvojnoj dobi učenika), drugim nastavnim predmetima i budućoj struci.

## O obliku i prostoru u matematičkom obrazovanju

Kako je već navedeno, jedna od sadržajnih domena matematičkog obrazovanja je domena Oblik i prostor. U njoj će se učiti i poučavati tzv. kvalitativna svojstva geometrijskih oblika koji predstavljaju objekte iz realnog svijeta.

Ono što oblike čini različitima ili nalik jedne drugima njihova su **geometrijska svojstva**, primjerice:

- imaju li paralelne stran(ice), okomite stran(ice) ili ništa od toga
- jesu li osnosimetrični, rotacijski simetrični ili ništa od toga
- jesu li slični, sukladni ili nijedno ni drugo...

Također, oblike možemo opisati pomoću njihovog **položaja, tj. lokacije u ravnini ili prostoru**, za čije precizno određenje koristimo različite **koordinatne sustave**. Obratno, koordinatni pogled na oblike omogućava

razumijevanje njihovih geometrijskih svojstava i njihove transformacije, odnosno promjene njihovog položaja, izgleda i veličine. Dakle, oblici se mogu **pomicati u ravnini ili prostoru**, a tu promjenu opisujemo u terminima translacije, osne simetrije i rotacije.

Konačno, oblike možemo gledati iz **različitih perspektiva**. Sposobnost sagledavanja iz različitih točaka gledanja doprinosi razumijevanju odnosa između dvodimenzionalnih i trodimenzionalnih figura te misaonom zamislanju, tj. vizualizaciji promjene položaja i veličine oblika.

Prema tome, kvalitetno matematičko obrazovanje učenicima treba omogućiti:

- analizu obilježja i svojstava dvodimenzionalnih i trodimenzionalnih geometrijskih oblika i razvijanje matematičkih argumenata o geometrijskim odnosima
- određivanje položaja i opisivanje prostornih odnosa upotrebom koordinatne geometrije
- primjenu geometrijskih transformacija i uporabu simetrije pri analizi matematičkih situacija
- razvoj prostornog zora te sposobnosti prepoznavanja geometrijskih svojstava i simetrija u objektima iz realnog svijeta i svakodnevnog života,
- razvoj sposobnosti uporabe vizualizacije, prostornog zora i geometrijskih modela pri rješavanju problema.

Dakle, razvoj prostornog zora učenika jedan je od najvažnijih zadataka nastave u domeni Oblik i prostor. Pri tome, pod pojmom **prostorni zor** (eng. *spatial ability*, *spatial sense*) podrazumijevamo intuitivni osjećaj za oblike u prostoru, kao i osjećaj za geometrijske aspekte svijeta koji nas okružuje i oblike koje formiraju objekti oko nas. On uključuje koncepte tradicionalne geometrije, a osobito sposobnost raspoznavanja, vizualnog prikazivanja i transformacije geometrijskih oblika. S druge strane, u njega su uključeni i za našu nastavu geometrije nestandardni pogledi na dvodimenzionalne i trodimenzionalne oblike, poput popločavanja ravnine i prostora, presavijanja papira, crtanja projekcija geometrijskih likova i tijela u kvadratnoj i trokutastoj mreži točaka... Konačno, razvijeni prostorni zor podrazumijeva i sposobnost misaone vizualizacije objekata i prostornih odnosa (npr. misaono okretanje objekta) i snalaženje s geometrijskim opisima objekata i njihovog položaja. Osobe s razvijenim prostornim

zorom uočavaju i poštuju geometrijske oblike u prirodi i umjetnosti, posebice arhitekturi, i znaju upotrijebiti geometrijske ideje za opis i analizu svijeta oko sebe.

## Razvoj geometrijskog mišljenja – van Hieleova teorija

U nastavi geometrije, a osobito u poučavanju domene Oblik i prostor, učitelji moraju voditi računa o tome na koji način njihovi učenici percipiraju ravninu i prostor te geometrijske oblike u njima. Pritom je dobro na umu imati tzv. **van Hieleovu teoriju geometrijskog mišljenja**, objavljenu 1973. u doktorskim disertacijama Dine van Hiele-Geldof i njezinog supru ga Pierra van Hielea na Sveučilištu u Utrechtu u Nizozemskoj. Najvažniji rezultat ove teorije je identificiranje pet razvojnih razina geometrijskog mišljenja. One opisuju kako i o kojem tipu geometrijskih ideja mislimo, bez obzira na količinu znanja koje imamo, a ključnu razliku među razinama predstavljaju objekti o kojima smo u stanju geometrijski misliti.

Prema van Hieleovoj teoriji, razine geometrijskog mišljenja su:

### **razina 0:** *Vizualizacija*

- objekt mišljenja: oblici i njihov izgled (čemu su nalik)
- proizvod mišljenja: klase ili grupe oblika koji “izgledaju slično”

### **razina 1:** *Analiza*

- objekt mišljenja: klase oblika (umjesto pojedinačnih oblika s razine 0)
- proizvod mišljenja: svojstva geometrijskih oblika

### **razina 2:** *Neformalna dedukcija*

- objekt mišljenja: svojstva geometrijskih oblika
- proizvod mišljenja: odnosi među svojstvima geometrijskih oblika

### **razina 3:** *Dedukcija*

- objekt mišljenja: odnosi među svojstvima geometrijskih oblika
- proizvod mišljenja: deduktivni aksiomatski sustavi geometrije (ravnine i prostora)

### **razina 4:** *Strogost*

- objekt mišljenja: deduktivni aksiomatski sustavi geometrije
- proizvod mišljenja: usporedba različitih aksiomatskih sustava geometrije (euklidska i neeuklidske geometrije).

Od objavljivanja, ova je teorija znanstveno potvrđena raznim metodama i danas više nema sumnji u njezinu valjanost. Svatko od učenika (i ne samo učenika!) nalazi se na određenoj van Hieleovoj razini geometrijskog mišljenja, a učenici iste dobi često su na različitim razinama. Pritom se većina učenika nižih razreda osnovne škole nalazi na nultoj razini, a rijetko koji učenik osmog razreda na razini višoj od druge. Pravilno prepoznavanje o kojim se razinama radi i usklađivanje poučavanja s tim razinama pridonijet će kvaliteti nastave geometrije i učeničkom uspjehu u savladavanju geometrijskih koncepata. Učeničke aktivnosti svakako trebaju biti primjerene njihovoj van Hieleovoj razini i usmjerene njihovom podizanju u sljedeću višu razinu.

U sljedećoj su tablici, uz objekte i strukturu geometrijskog mišljenja za prve tri van Hieleove razine, dani i tipični primjeri učeničkog zaključivanja za svaku od njih.

|  | <b>RAZINA 0</b><br>Vizualizacija   | <b>RAZINA 1</b><br>Analiza   | <b>RAZINA 2</b><br>Neformalna dedukcija   |
|--|--|--|---|
| <b>OBJEKTI GEOMETRIJSKOG MIŠLJENJA</b>   | pojedinačni likovi   | klase likova   | definicije klasa likova   |
| <b>STRUKTURA GEOMETRIJSKOG MIŠLJENJA</b> | vizualno prepoznavanje imenovanje vizualno sortiranje  | prepoznavanje svojstava kao karakteristika klasa likova  | uočavanje i formuliranje logičkih odnosa među svojstvima  |
| <b>PRIMJERI</b>                          | <i>Svi paralelogrami idu zajedno jer „izgledaju jednako”.<br/>Pravokutnici, kvadrati i rombovi nisu paralelogrami jer „ne izgledaju kao paralelogram”.</i> | <i>Paralelogram ima četiri stranice, nasuprotne kutove jednake, nasuprotne stranice jednake, nasuprotne stranice paralelne, dijagonale mu se raspolavljaju itd.<br/>Pravokutnik nije paralelogram jer pravokutnik ima kutove od 90° a paralelogram nema.</i> | <i>Jednakost nasuprotnih stranica povlači njihovu paralelnost.<br/>Paralelnost nasuprotnih stranica povlači njihovu jednakost.<br/>Jednakost nasuprotnih kutova povlači jednakost nasuprotnih stranica.<br/>Raspolavljanje dijagonala povlači simetriju pri rotaciji za 180°.</i> |

Lakšemu prepoznavanju razine geometrijskog mišljenja na kojoj se nalazi pojedini učenik te prilagodbi didaktičkih metoda s ciljem podizanja te razine može pomoći i donja tablica.

|  | TIPIČNO GEOMETRIJSKO PONAŠANJE UČENIKA   | UTJECAJ NA NASTAVU OBLIKA I PROSTORA  |
|--|--|---|
| <p><b>RAZINA 0</b></p> <p><b>Vizualizacija</b></p> | <p>Učenici:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– često koriste nevažna vizualna svojstva (npr. boju) pri prepoznavanju likova te njihovu uspoređivanju, klasificiranju i opisivanju</li> <li>– obično se pozivaju na vizualne prototipove likova i lako se zbunjuju orijentacijom lika (npr. kvadrat koji nije nacrtan u standardnom položaju ne prepoznaju kao kvadrat, trapez čije su paralelne stranice nacrtane vertikalno ne prepoznaju kao trapez)</li> <li>– nisu sposobni pojmiti beskonačno mnogo varijacija određenog tipa lika (npr. u terminima njegove orijentacije i oblika)</li> <li>– nekonzistentno klasificiraju likove (npr. koriste neuobičajena ili nevažna svojstva kao kriterije sortiranja likova)</li> <li>– nepotpuno opisuju (definiraju) likove tako što nužne uvjete (često vizualne) smatraju i dovoljnim</li> </ul> | <p>U nastavu treba uključiti dovoljno:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– učeničkih aktivnosti s mnogo sortiranja i klasificiranja</li> <li>– raznolikih primjera oblika kako njihove nebitne osobine ne bi previše dobile na važnosti</li> <li>– prilika da učenici crtaju, izgrađuju, sastavljaju i rastavljaju dvodimenzionalne i trodimenzionalne oblike</li> <li>– učeničkih aktivnosti koje se fokusiraju na specifične osobine ili svojstva oblika kako bi učenici razvijali razumijevanje geometrijskih svojstava i prirodno ih počeli koristiti</li> </ul> |



|                                       | TIPIČNO GEOMETRIJSKO PONAŠANJE UČENIKA  | UTJECAJ NA NASTAVU OBLIKA I PROSTORA  |
|---------------------------------------|---|---|
| <b>RAZINA 1</b><br><br><b>Analiza</b> | <p>Učenici:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– eksplicitno uspoređuju likove u terminima njihovih bitnih svojstava</li> <li>– izbjegavaju inkluzije među različitim klasama likova (npr. kvadrate i pravokutnike smatraju disjunktним klasama, kao i paralelograme i trapeze)</li> <li>– sortiraju likove s obzirom na samo jedno svojstvo (npr. s obzirom na svojstva stranica, dok svojstva poput simetrije, kutova i dijagonala igniriraju)</li> <li>– za opisivanje (definiranje) likova neekonomično koriste sva njihova svojstva umjesto samo dovoljnih</li> <li>– eksplicitno odbijaju definicije koje daju drugi ljudi (npr. učitelj, udžbenik) i prednost daju definicijama koje su sami smislili</li> <li>– smatraju da je empirijska provjera (npr. skica, nekoliko mjerenja ili primjera) dovoljna za utvrđivanje istinitosti neke tvrdnje</li> </ul> | <p>U nastavi treba:</p> <ul style="list-style-type: none"> <li>– osmisлити dovoljno učeničkih aktivnosti fokusiranih na geometrijska svojstva oblika a ne samo na njihovo prepoznavanje</li> <li>– prepoznati i iskoristiti činjenicu da uvođenjem novih geometrijskih koncepata raste broj svojstava oblika</li> <li>– ideje primjenjivati na cijele klase oblika (npr. svi četverokuti, sve prizme) a ne na pojedinačne modele</li> <li>– nova svojstva uočavati analizom klasa oblika (npr. pronaći načine na koje se trokuti mogu sortirati u grupe i na temelju tih grupa definirati vrste trokuta)</li> <li>– koristiti program dinamične geometrije</li> </ul> |

|  | TIPIČNO GEOMETRIJSKO PONAŠANJE UČENIKA  | UTJECAJ NA NASTAVU OBLIKA I PROSTORA   |
|--|---|--|
| <b>RAZINA 2</b><br><br><b>Neformalna dedukcija</b> | Učenici: <ul style="list-style-type: none"> <li>– formuliraju korektne i ekonomične definicije likova</li> <li>– mogu nepotpune definicije transformirati u potpune i spontanije prihvaćaju i koriste definicije novih pojmova</li> <li>– prihvaćaju različite ekvivalentne definicije istog pojma</li> <li>– hijerarhijski klasificiraju likove (npr. četverokute)</li> <li>– eksplicitno koriste logički oblik <i>ako ... onda...</i> pri formuliranju pretpostavki i baratanju njima, te implicitno koriste osnovna logička pravila zaključivanja (npr. modus ponens)</li> <li>– ne razumiju ulogu aksioma, definicija, teorema i dokaza (njima su to sve pravila).</li> </ul> | U nastavi treba: <ul style="list-style-type: none"> <li>– poticati učenike na stvaranje i provjeru hipoteza (npr. <i>Vrijedi li to uvijek?, Je li to istina za sve trokute ili samo za pravokutne?</i>)</li> <li>– osmisliti učeničke aktivnosti u kojima se ispituju svojstva oblika kako bi se odredili nužni i dovoljni uvjeti za oblike ili koncepte (npr. <i>Što mislite, koje će svojstvo dijagonala garantirati da se radi o kvadratu?</i>)</li> <li>– upotrebljavati jezik neformalne dedukcije: <i>za svaki, za neke, ni za jedan, ako ... onda ..., što ako ...</i> i sl.</li> <li>– poticati učenike da se okušaju u izvođenju neformalnih dokaza i zahtijevati da se uvjere u smislenost neformalnih dokaza koje ponudi nastavnik ili drugi učenici</li> </ul> |

Uvažavajući rezultate van Hieleove teorije, u Okvirnom matematičkom kurikulumu od učenika se na kraju prvoga odgojno-obrazovnog ciklusa, tj. na završetku četvrtog razreda osnovne škole očekuje da mogu:

- opisati položaj i smjer upotrebom svoje orijentacije i jednostavnih koordinata (npr. kvadratna mreža)

- prepoznati, imenovati, izgraditi, opisati, usporediti i razvrstati crte, plohe te jednostavne dvodimenzionalne i trodimenzionalne oblike i njihove dijelove
- skicirati jednostavne ravninske oblike, te ih nacrtati rabeći geometrijski pribor
- prepoznati i prikazati jednostavne ravninske i prostorne oblike u različitim položajima
- istražiti i predvidjeti rezultate sastavljanja i rastavljanja ravninskih i prostornih oblika rabeći konkretne materijale (štapice, likove, kockice, makete geometrijskih tijela i dr.)
- prepoznati osnovne geometrijske oblike u svakodnevним situacijama.

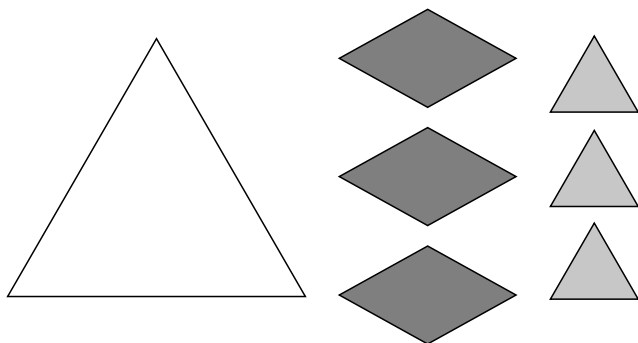
### **Primjeri učeničkih aktivnosti namijenjenih razvoju geometrijskog mišljenja i prostornog zora u nižim razredima osnovne škole**

U početnim razredima osnovne škole naglasak se stavlja na kvalitativna svojstva geometrijskih objekata. Učenici su u pravilu na razini vizualizacije (van Hieleova razina 0) i figure (likove i tijela) tretiraju kao cjeline. Primjerice, oni prepoznaju kvadrate i pravokutnike, no ne prepoznaju kvadrat kao poseban slučaj pravokutnika, kao ni jednakokranični trokut kao poseban slučaj jednakokračnog trokuta. Kako bi obogatili svoje geometrijsko znanje i geometrijsko mišljenje podigli na razinu analize (razina 1), učenici bi trebali koristiti različite konkretne materijale i slike, ali i primjerene računalne programe. Razvoju geometrijskog mišljenja pridonosi i korištenje geometrijskih modela (likova i tijela) te raznovrsnih mreža točaka.

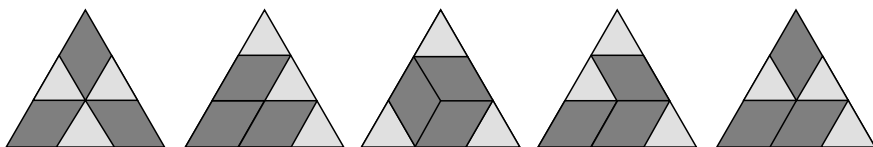
Prvih nekoliko učeničkih aktivnosti koje prikazujemo u obliku su slagalica (eng. *puzzle*) a učenici ih mogu provesti samostalno ili radeći timski. Pokušavajući sastaviti određeni lik od danih dijelova, najčešće oblika mnogokuta, učenici će te dijelove zakretati i postavljati u različite položaje te uočavati njihova geometrijska svojstva potrebna za slaganje slagalice. Time će stjecati iskustvo nužno za prelazak na van Hieleovu razinu analize. Za svaku aktivnost u zagradama navodimo razred za koji je primjerena.

**Aktivnost 1 - Slaganje trokuta** (1. razred)

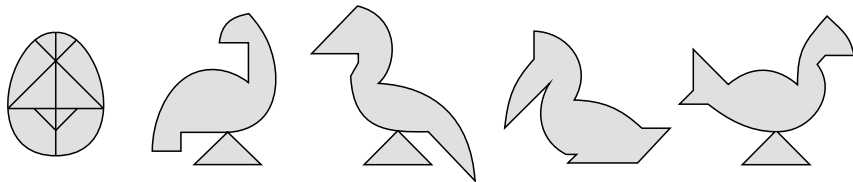
Radeći u skupinama, učenici trebaju dani jednakostranični trokut u potpunosti i bez preklapanja prekriti danim elementima. Zadatak je sastaviti i nacrtati što više različitih rješenja.



Uočite da postoji samo pet rješenja, danih na donjoj slici. Učenici će, ne prepoznajući simetriju (osna simetrija, rotacija!), zacijelo nacrtati više njih, na što im učitelj po završetku aktivnosti treba skrenuti pažnju tako da ih usmjeri da grupiraju „slično složene” trokute.

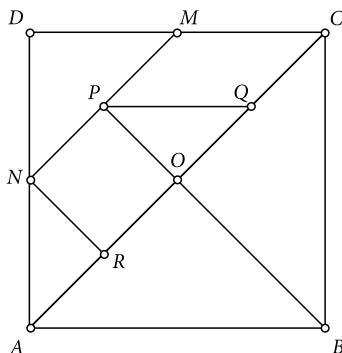
**Aktivnost 2 – Slaganje jajeta** (od 1. razreda)

Učenici „jaje” na slici trebaju izrezati duž naznačenih crta te od dobivenih dijelova složiti prikazane likove (i ne samo njih!).

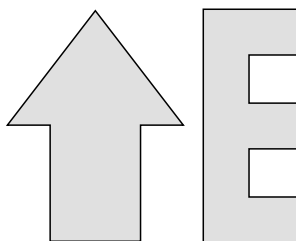


**Aktivnost 3 – Tangram** (od 1. razreda)

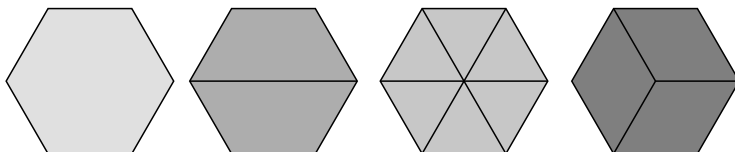
Tangram je stara kineska slagalica s velikim mogućnostima u nastavi matematike. Sastoji se od sedam dijelova, kao na slici: pet jednakokračnih pravokutnih trokuta i dva četverokuta (kvadrat i paralelogram).



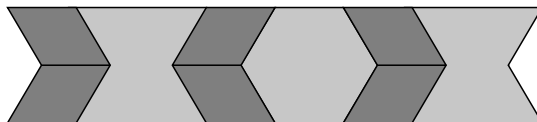
Učitelj na sat treba donijeti pripremljene listiće s gornjom slikom. Učenici iz njih trebaju izrezati dijelove tangrama i od njih složiti trokut te oblike na donjoj slici.

**Aktivnost 4 – Slaganje trokuta** (4. razred)

Učitelj na sat donosi listiće s likovima kao na donjoj slici. Učenici ih izrezuju duž naznačenih linija te od dobivenih dijelova sastavljaju i potom crtaju što je moguće više trokuta, ali tako da se dijelovi ne preklapaju niti među njima ostaje prazna površina.



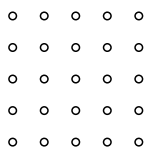




Mreže točaka raspoređenih u vrhove nevidljivih kvadrata, tzv. *kvadratne mreže točaka*, pružaju nebrojene mogućnosti za učeničke aktivnosti.

### **Aktivnost 7 - Kvadrati i pravokutnici** (4. razred)

Učitelj na sat donosi nastavne listiće s više jednakih mreža točaka dimenzija  $5 \times 5$ , kao na slici, te postavljenim sljedećim zadacima.



Nacrtaj što više:

- kvadrata kojima su vrhovi u točkama mreže
- pravokutnika kojima su vrhovi u točkama mreže
- pravokutnih trokuta kojima su vrhovi u točkama mreže
- jednakokranih trokuta kojima su vrhovi u točkama mreže. Ima li među nacrtanim trokutima jednakostraničnih trokuta? Obrazloži odgovor.

### **Aktivnost 8 – Četverokuti** (4. razred)

Slično kao u prethodnoj aktivnosti, učitelj na sat donosi nastavne listiće s više jednakih mreža točaka dimenzija  $3 \times 3$ , kao na slici. U njima učenici trebaju nacrtati što više četverokuta različitih oblika i veličina (tzv. nesukladnih četverokuta) čiji su vrhovi u točkama mreže.



Nacrtae četverokute učenici mogu grupirati prema uočenim svojstvima, primjerice imaju li ili nemaju pravi kut, jesu li ili nisu osnosimetrični

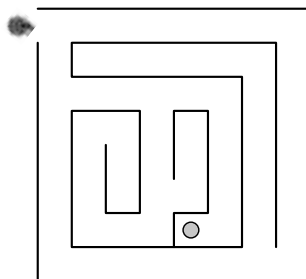
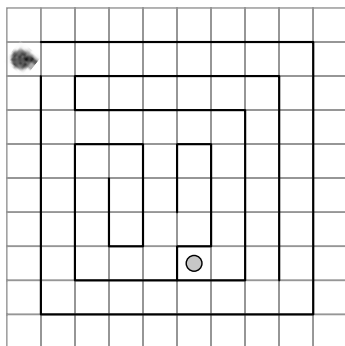
(za učenike od petog razreda), imaju li ili nemaju stranice jednakih duljina i dr. Ova aktivnost pruža uvid u razinu učeničkog razumijevanja svojstava geometrijskih likova.

Učenici nižih razreda osnovne škole usredotočeni su na jednostavne prostorne odnose i jednostavna svojstva geometrijskih figura. Kako je navedeno u očekivanim postignućima na kraju prvog odgojno-obrazovnog ciklusa, oni mogu opisati položaj objekta uporebom svoje orijentacije, prepoznati, imenovati, opisati i razvrstati dvodimenzionalne i oblike prema zadanom ili odabranom pravilu, izgraditi trodimenzionalne objekte od konkretnih materijala te prepoznati i opisati dvodimenzionalne oblike sadržane u jednostavnijem trodimenzionalnom objektu. U nižim razredima može započeti i proučavanje osnovnih geometrijskih transformacija (posebno simetrije) korištenjem konkretnih materijala, npr. presavijanjem papira. Tako se očekuje da će učenici moći u kvadratnoj mreži dovršiti i opisati slike koje imaju horizontalnu ili vertikalnu os simetrije (npr. kuća, leptir i sl.). Čak i u toj ranoj fazi obrazovanja učenicima je primjerena osnovna koordinatna geometrija u kvadratnoj mreži (primjerice, razne vrste igara na ploči).

Orijentaciju u ravnini učenici mogu uvježbati sljedećim aktivnostima.

### **Aktivnost 9 - Labirinti** (2. i 3. razred)

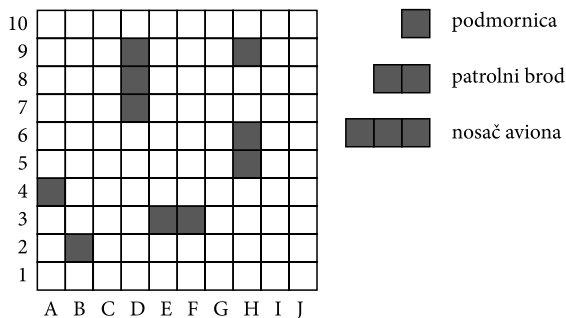
Učenici trebaju što preciznije opisati kretanje buba-mare kroz labirint na putu do hrane. Isti labirint može biti jednostavniji ili složeniji za opisivanje, ovisno o tome nacrtamo li ga u kvadratnoj mreži ili bez nje, kao na donjim slikama. Radeći u timovima, učenici i sami mogu kreirati labirinte koje će „dešifrirati” učenici ostalih timova.





**Aktivnost 10 – Potapanje brodova** (4. razred)

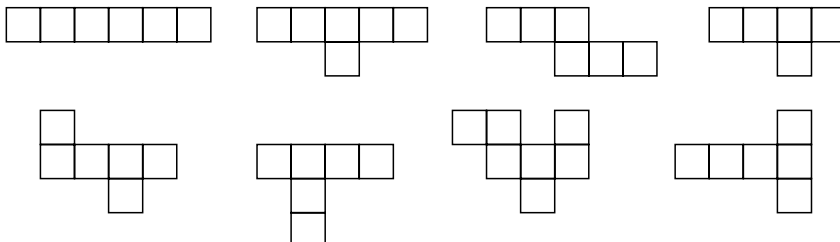
Dobro poznata igra potapanja brodova, koju učenici igraju u paru, ima i vrlo lijepu didaktičku ulogu pri usvajanju pojma jednostavnih koordinata u kvadratnoj mreži. Koristeći uređene parove učenici će zapisati položaj svoje flote, raspoređene primjerice kao na donjoj slici.



Počevši od trećeg razreda, učenici mogu početi istraživati i predviđati rezultate sastavljanja i rastavljanja ravninskih i prostornih oblika. Rabeći konkretne materijale, primjerice štapiće, likove, kockice i makete geometrijskih tijela, oni će oblike najprije fizički sastavljati i rastavljati te ih opisivati gledajući u njih. Među ostalim, na temelju zadane mreže izrađivat će modele kocke, kvadra, tetraedra, trostrane i četverostrane prizme. Stjecanjem dovoljno iskustva kroz razne aktivnosti, bit će u stanju rezultat predvidjeti i tako da ga misaono zamisle (vizualiziraju). Slijedi nekoliko primjera aktivnosti čija je svrha učenicima razviti sposobnost vizualizacije trodimenzionalnih oblika na temelju njihovih dvodimenzionalnih prikaza (mreža).

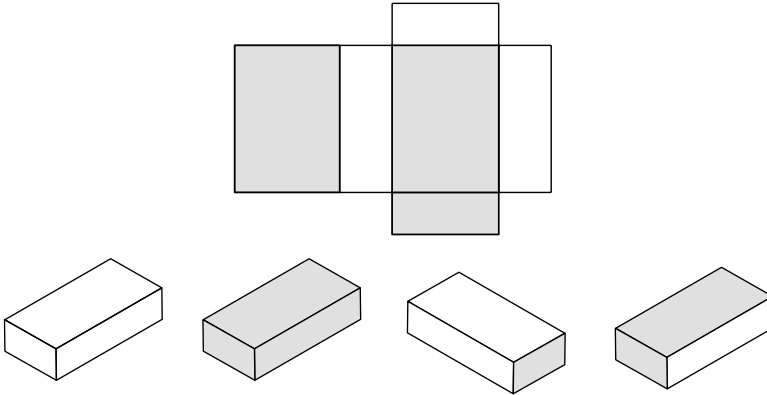
**Aktivnost 11 – Sastavljanje kocke** (4. razred)

Učenici trebaju provjeriti koje od nacrtanih mreža predstavljaju mrežu kocke.

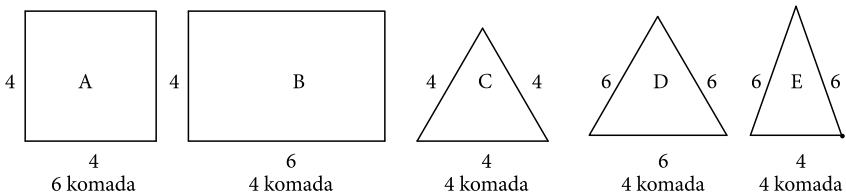


**Aktivnost 12 – Kutija** (4. razred)

Misaono sastavljajući kutiju (kvadar) iz dane mreže, učenici trebaju odgovoriti na pitanje na kojoj je slici prikazan taj kvadar.

**Aktivnost 13 – Sastavljanje geometrijskih tijela** (4. razred)

Učitelj za razred treba pripremiti kompletne mnogokuta, dimenzija kao na slici. Radeći u timu, učenici od njih trebaju sastaviti što je moguće više geometrijskih tijela (prizmi i piramida).



Rješenja je iznenađujuće mnogo! Ona su redom:

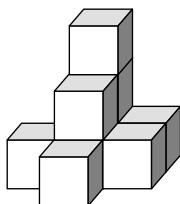
- četverostrane prizme: AAAAAA, AABB BB
- četverostrane piramide: ACCCC, AEEEE, BDDEE, BCEEE
- trostrane prizme: AAACC, ABBEE, BBBCC, BBBDD
- trostrane piramide: CCCC, DDDD, CEEE, DDEE, EEEE.

Prethodne su aktivnosti trodimenzionalne oblike povezivale s njihovim mrežama. Osim toga, najprije gledajući u fizički predložak a kasnije

njegovim misaonim zamišljanjem (vizualiziranjem), učenici mogu crtati i različite poglede na geometrijska tijela sastavljena od jednakih kocaka, kao i graditi ta tijela na temelju danih pogleda na njih. Kao vježba, mogu poslužiti sljedeće aktivnosti.

#### **Aktivnost 14 – Pogledi** (4. razred)

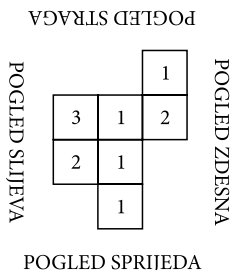
Učenicima na raspolaganju trebaju biti kompleti jednakih kocaka (primjerice, drvenih). Promatrajući donju sliku, učenici od kocaka trebaju sastaviti takvo tijelo.



Potom u kvadratnoj mreži trebaju nacrtati pogled sprijeda, pogled odozgo i pogled zdesna na to tijelo.

#### **Aktivnost 15 – Pogledi** (4. razred)

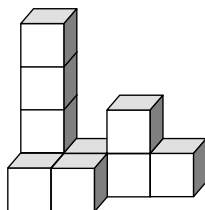
Kao u prethodnoj aktivnosti, učenicima na raspolaganju trebaju biti kompleti jednakih kocaka. Na slici je prikazan plan gradnje tijela sastavljenog od takvih kocaka. Brojevi na tlocrtu označavaju broj kocaka u pojedinom „stupcu”, tj. njegovu „visinu”.



Radeći u timovima, učenici trebaju sagraditi tijelo prema zadanom planu, a potom u kvadratnoj mreži nacrtati poglede na njega s raznih strana. Po stjecanju dovoljno iskustva, sama gradnja tijela može se i preskočiti, tj. učenici mogu pokušati poglede crtati samo na temelju vizualizacije.

**Aktivnost 16 – Pogledi** (4. razred)

Tijelo na donjoj slici sagrađeno je od jediničnih kocaka. Učenici trebaju u kvadratnoj mreži nacrtati njegov tlocrt i na njemu napisati „visinu” pripadnih „stupaca”. Koliko je kockica utrošeno pri gradnji?

**Literatura**

1. A. F. Coxford, *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics. Addenda Series: Geometry from Multiple Perspectives*, National Council of Teachers of Mathematics, 1991.
2. D. Geddes, I. Fortunato, *Geometry: Research and Classroom Activities*, iz D. T. Owens (ur.), *Research Ideas for the Classroom: Middle Grades Mathematics*. Macmillan, New York, 1993.
3. M. A. Sobel, E. M. Maletsky, *Teaching Mathematics: A Sourcebook of Aids, Activities, and Strategies*, 3<sup>rd</sup> edition, Allyn and Bacon, 1999.
4. M. D. de Villiers, *Research evidence on hierarchical thinking, teaching strategies and the van Hiele theory: Some critical comments* (Internal RU-MEUS report, no 10), University of Stellenbosch, South Africa, 1987.
5. M. D. de Villiers, *Uloga i funkcija dokaza u matematici*, Poučak 35, Zagreb, 2008.
6. \*\*\*, *Navigating through Geometry - Visualization, Spatial Reasoning, and Modeling*, National Council of Teachers of Mathematics, 2009.
7. \*\*\*, *New Jersey Mathematics Curriculum Framework — Geometry and Spatial Sense*
8. \*\*\*, *Okvirni matematički kurikulum*, Poučak 40, Zagreb, 2009.