

Goormaghtighova jednadžba u teoriji brojeva

Dijana Kreso

U svom izlaganju ću govoriti o rezultatima koji su proizašli iz zajedničkog rada s M. Bennetom i A. Gherghom, a tiču se Goormaghtighove jednadžbe. Radi se o jednadžbi

$$(1) \quad \frac{x^m - 1}{x - 1} = \frac{y^n - 1}{y - 1}, \quad y > x > 1, \quad m > n > 2.$$

Poznata su dva rješenja ove jednadžbe: $(x, y, m, n) = (2, 5, 5, 3), (2, 90, 13, 3)$ i vjeruje se da su to jedina rješenja. Nije poznato ima li ova jednadžba konačno ili beskonačno rješenja, te čak niti je li to slučaj ako fiksiramo jednu od varijabli. Pokazano je da ona ima konačno mnogo rješenja ako fiksiramo bilo koje dvije varijable. Štoviše, postoje efektivni rezultati u svim slučajevima osim u slučaju kada su dvije fiksirane varijable eksponenti m, n . Uz uvjet da za fiksne m, n vrijedi $\gcd(m - 1, n - 1) > 1$ zna se da je samo konačno mnogo x, y koji zadovoljavaju (1) i da je ovaj rezultat efektivan. Moji koautori i ja smo pokazali da za fiksni n postoji efektivno izračunljiva konstanta $\kappa = \kappa(n)$ t.d. $\max\{x, y, m\} < \kappa$ za sve x, y, m koji zadovoljavaju (1) i $\gcd(m - 1, n - 1) > 1$. Uz to, Goormaghtigovu jednadžbu smo u potpunosti riješili za neke male n uz isti uvjet na esponente. U svom izlaganju ću predstaviti ove rezultate i prezentirati neke metode kojim se ovaj i slični problemi mogu tretirati.